

高等数学公式手册

一、函数

1、定义

定义域内任何一个自变量对应唯一的函数值。两函数相等只要定义域和对应法则相同即可。

2、表示方法

解析法、表格法、图像法。分段函数是一个函数，其定义域是各段定义域的并集、值域是各段值域的并集。

3、性质

3.1 单调性

对定义域内一个区间 I ， $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ ， $f(x)$ 是增函数 $\Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ； $f(x)$ 是减函数 $\Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$ ；

$$f(x) \text{ 是增 (减) 函数} \Leftrightarrow \forall x_1 \neq x_2, \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 (< 0)$$

$$f(x) \text{ 是增 (减) 函数} \Leftrightarrow \forall x_1 \neq x_2, (x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] > 0 (< 0)$$

3.2 奇偶性

对定义域内任意 x ， $f(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x) = f(-x)$ ； $f(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x) = -f(-x)$ 。

偶函数图像关于轴对称，奇函数图像关于坐标原点对称。

3.3 周期性

对定义域内任意 x ，存在非零常数 T ， $f(x) = f(x+T)$

若 $f(x+a) = f(x+b)$ ，则 $f(x)$ 是周期函数， $b-a$ 是它的一个周期。

对于非零常数 T ， $f(x)$ 满足 $f(x+T) = \frac{1}{f(x)}$ ，则函数 $y = f(x)$ 的一个周期为 $2T$

若 $f(x+T) = -\frac{1}{f(x)}$ ，则函数 $y = f(x)$ 的一个周期为 $2T$

3.4 对称性

3.4.1 对称性的性质

$y = f(x)$ 与 $y = -f(x)$ 关于 x 轴对称

$y = f(x)$ 与 $y = f(-x)$ 关于 y 轴对称

$y = f(x)$ 与 $y = f(2a-x)$ 关于 $x=a$ 对称

$y = f(x)$ 与 $y = 2a - f(x)$ 关于 $y = a$ 对称

函数 $y = f(x)$ 满足 $f(x+a) = f(b-x)$ 时, 函数 $y = f(x)$ 的图像关于直线 $x = \frac{a+b}{2}$ 对称。

函数 $y = f(x)$ 满足 $f(x+a) + f(b-x) = c$ 时, 函数 $y = f(x)$ 的图像关于点 $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2}\right)$ 对称。

函数 $y = f(a+x)$ 的图像与 $y = f(b-x)$ 关于直线 $x = \frac{b-a}{2}$ 对称。

3.4.2 对称性与周期性的关系

函数 $y = f(x)$ 满足 $f(a+x) = f(a-x)$, $f(b+x) = f(b-x)$ ($a \neq b$), 则函数 $y = f(x)$ 是周期函数, 且 $2b-2a$ 是一个周期。

已知函数 $y = f(x)$ 对任意实数 x , 都有 $f(a+x) + f(x) = b$, 则 $y = f(x)$ 是以 $2a$ 为周期的函数。

3.5 有界性

对定义域内任意 x , $f(x)$ 有上界 $\Leftrightarrow f(x) \leq K_1$, $f(x)$ 有下界 $\Leftrightarrow f(x) \geq K_1$, $f(x)$ 有界 $\Leftrightarrow |f(x)| \leq M$

4、基本初等函数

4.1 幂函数 $y = x^n$

$n > 0$	在 $x \in (0, +\infty)$ 单调递增, 图像过坐标原点
$n < 0$	在 $x \in (0, +\infty)$ 单调递减

4.2 指数函数 $y = a^x, (x \in (-\infty, +\infty))$

$0 < a < 1$, $(-\infty, +\infty)$ 单调递减, $x < 0$ 时 $y > 1$, $x > 0$ 时 $0 < y < 1$

$a > 1$, $(-\infty, +\infty)$ 单调递增, $x < 0$ 时 $0 < y < 1$, $x > 0$ 时 $y > 1$

4.3 对数函数 $y = \log_a x, (x \in (0, +\infty))$

$0 < a < 1$, 在 $(0, +\infty)$ 单调递减, $0 < x < 1$ 时 $y > 0$, $x > 1$ 时 $y < 0$

$a > 1$, 在 $(0, +\infty)$ 单调递增, $0 < x < 1$ 时 $y < 0$, $x > 1$ 时 $y > 0$

指数函数 $y = a^x$ 与对数函数 $y = \log_a x$ 互为反函数, 它们的图象关于直线 $y = x$ 对称。

4.5 三角函数

4.5.1 基本三角函数性质

	值域	周期	单调区间	奇偶性	对称中心	对称轴
$y = \sin x$ ($x \in R$)	$[-1, 1]$	$2k\pi$ ($k \neq 0$)	增 $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$ 减 $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$	奇偶数	$(k\pi, 0)$	$x = k\pi + \frac{\pi}{2}$
$y = \cos x$ ($x \in R$)	$[-1, 1]$	$2k\pi$ ($k \neq 0$)	增 $[-\pi + 2k\pi, 2k\pi]$ 减 $[2k\pi, 2k\pi + \pi]$	偶函数	$\left(k\pi + \frac{\pi}{2}, 0\right)$	$x = k\pi$
$y = \tan x$ $\left(x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$	R	$k\pi$ ($k \neq 0$)	增 $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$	奇函数	$\left(\frac{k\pi}{2}, 0\right)$	无

4.5.2 三角函数的变换

平 移 变 换	上 下 平 移	$y = f(x)$ 图像平移 $ k $ 得 $y = f(x) + k$ 图像, $k > 0$ 向上, $k < 0$ 向下。
	左 右 平 移	$y = f(x)$ 图像平移 $ \varphi $ 得 $y = f(x + \varphi)$ 图像, $\varphi > 0$ 向左, $\varphi < 0$ 向右。
伸 缩 变 换	x 轴 方 向	$y = f(x)$ 图像各点把横坐标变为原来 ω 倍得 $y = f\left(\frac{1}{\omega}x\right)$ 的图像。
	y 轴 方 向	$y = f(x)$ 图像各点纵坐标变为原来的 A 倍得 $y = Af(x)$ 的图像。
对 称 变 换	中 心 对 称	函数 $y = f(x)$ 与函数 $y = -f(-x)$ 的图像关于坐标原点对称; $y = f(x)$ 图 像 关 于 点 (a, b) 对 称 图 像 的 解 析 式 是 $y = 2b - f(2a - x)$
	轴 对 称	函数 $y = f(x)$ 与函数 $y = f(-x)$ 的图象关于 y 轴对称; 函数 $y = f(x)$ 与函数 $y = -f(x)$ 的图象关于 x 轴对称; $y = f(x)$ 图 象 关 于 直 线 $x = a$ 对 称 图 象 的 解 析 式 是 $y = f(2a - x)$; $y = f(x) $ 的图象先保留 $y = f(x)$ 原来在 x 轴上方的图象, 作出 x 轴下方的图象关于 x 轴的对称图形, 然后擦去 x 轴下方的图象得到; $y = f(x)$ 的图象先保留 $y = f(x)$ 在 y 轴右边的图象, 擦去 y 轴 左方的图象, 然后作出 y 轴右方的图象关于 y 轴的对称图形得到。

函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ $(A > 0, \omega > 0)$ 的性质及其应用	$y = \sin x$ 的图象变为 $y = A \sin(\omega x + \varphi) + b$ 的图象方法 (先平移后伸缩和先伸缩和平移两种方法)
	已知解析式确定函数性质 (先 将 函 数 化 为 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 或 $y = A \cos(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0$)) 1. 关于三角函数奇偶性的重要结论: 若 $y = A \sin(x + \varphi)$ 为奇函数, 则 $\varphi = k\pi (k \in \mathbb{Z})$ 若 $y = A \sin(x + \varphi)$ 为偶函数, 则 $\varphi = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ 若 $y = A \sin(x + \varphi)$ 为奇函数, 则 $\varphi = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ 若 $y = A \sin(x + \varphi)$ 为偶函数, 则 $\varphi = k\pi (k \in \mathbb{Z})$ 若 $y = A \sin(x + \varphi)$ 为奇函数, 则 $\varphi = \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$, 该函数不可能为偶函数

4.6 反三角函数

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x \quad \arctan x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccot} x$$

5、基本运算性质

5.1 指对幂的运算规则

5.1.1 正数的正分数指数幂: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} (a > 0, m, n \in \mathbb{N}_+, \text{且 } n > 1);$

正数的负分数指数幂: $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} (a > 0, m, n \in \mathbb{N}_+, \text{且 } n > 1);$

0 的正分数指数幂等于 0; 0 的负分数指数幂没有意义。

5.1.2 幂的运算性质: $a^m a^n = a^{m+n}, (a^m)^n = a^{mn}, (ab)^n = a^n b^n$ 其中 $a > 0, b > 0, m, n \in \mathbb{R}$ 。

如果 $a^b = N (a > 0, a \neq 1)$, 那么数 b 叫作以 a 为底 N 的对数, 记作 $b = \log_a N$, 其中 a 叫作对数的底数, N 叫作真数。

5.2 对数的性质与运算法则

5.2.1 对数的运算法则

如果 $a > 0$ 且 $a \neq 1, M > 0, N > 0$, 那么

$$\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N; \quad \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N;$$

$$\log_a M^n = n \log_a M \quad (n \in R); \quad \log_{a^m} M^n = \frac{n}{m} \log_a M$$

5.2.2 对数的重要公式

$$a^{\log_a N} = N; \quad \log_a a^N = N$$

$$\text{换底公式: } \log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}; \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\text{【推广】} \log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c d = \log_a d.$$

5.3 三角函数的运算法则

5.3.1 积化和差

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \cdot \tan \beta} \quad \cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot \alpha \cdot \cot \beta \mp 1}{\cot \beta \pm \cot \alpha}$$

5.3.2 和差化积

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

5.3.3 倍角公式

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cot 2\alpha = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

5.3.4 半角公式

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$\cot \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$$

5.3.5 万能公式

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad u = \tan \frac{x}{2}$$

二、极限部分

1、两个重要极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

2、极限的四则运算

$$\text{设 } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$$

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \pm B$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \cdot B$$

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0)$$

3、函数、极限、无穷小关系定理

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x), \quad \text{其中 } \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0, \quad \text{即 } \alpha(x) \text{ 是 } x \rightarrow x_0 \text{ 时的无穷小}$$

4、无穷小的运算

有限个无穷小的和仍为无穷小

有限个无穷小的积仍为无穷小

有界函数乘以无穷小量仍然是无穷小量

5、无穷小的比较

$$\text{设 } \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = 0$$

$$1) \quad \text{若 } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0, \quad \text{则称当 } x \rightarrow x_0 \text{ 时, } \alpha(x) \text{ 是比 } \beta(x) \text{ 高阶的无穷小, } \beta(x) \text{ 是比 } \alpha(x)$$

低阶的无穷小, 记作 $\alpha(x) = o(\beta(x))$

$$2) \quad \text{若 } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \neq 0, \quad \text{则称当 } x \rightarrow x_0 \text{ 时, } \alpha(x) \text{ 与 } \beta(x) \text{ 是同阶的无穷小}$$

3) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, 则称当 $x \rightarrow x_0$ 时, $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小, 记作 $\alpha(x) \sim \beta(x)$

4) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = c \neq 0, k > 0$, 则称当 $x \rightarrow x_0$ 时, $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 k 阶无穷小

6、常见的无穷小代换

当 $x \rightarrow 0$ 时, $x \sim \sin x, x \sim \tan x, x \sim \arcsin x, x \sim \arctan x$

$$e^x - 1 \sim x, a^x - 1 \sim x \ln a, (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \ln(1+x) \sim x$$

三、一元函数微分部分

1、基本求导公式

$$(\sin)' = \cos x \quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x$$

$$(\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(\sec x)' = \sec x \cdot \tan x \quad (\csc x)' = -\csc x \cdot \cot x$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$(C)' = 0 \quad (x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

2、函数的和、差、积、商的求导公式

$$1) [u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$$

$$2) [u(x) \cdot v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

$$3) \left[\frac{u(x)}{v(x)} \right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \quad (v(x) \neq 0)$$

3、反函数的求导法则

如果函数 $x = f(y)$ 在区间 I_y 内单调、可导且 $f'(y) \neq 0$, 则它的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 在

区间 $I_x = \{x | x = f(y), y \in I_y\}$ 内也可导, 且 $[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(y)}$ 或 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$

即反函数的导数等于直接函数导数的倒数。

4、复合函数的求导法则

设 $y = f(u), u = \varphi(x)$, 如果 $u = \varphi(x)$ 在点 x 处可导, $f(u)$ 在相应的点 u 可导, 则 $y = f(\varphi(x))$ 在点 x 处可导, 且有 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'_u(u) \cdot \varphi'_x(x)$

5、莱布尼茨公式

设 $u = u(x)$ 及 $v = v(x)$ 在点 x 处具有 n 阶导数, 则 $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$

6、微分的计算

$$dy = y' dx$$

7、微分中值定理

1) 罗尔中值定理 (三条件一结论)

设 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = f(b)$, 则在 (a, b) 内至少存在一点 $\xi (a < \xi < b)$, 使得 $f'(\xi) = 0$ 。

2) 拉格朗日中值定理 (两条件一结论)

设 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 则在 (a, b) 内至少存在一点 $\xi (a < \xi < b)$, 使得 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$ 。

3) 柯西中值定理 (两个半条件一结论)

设 $f(x), F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $F'(x) \neq 0, x \in (a, b)$ 则在 (a, b) 内至少存在一点 $\xi (a < \xi < b)$, 使得 $\frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$ 。

4) 泰勒中值定理

设 $y = f(x)$ 在含有 x_0 的某个开区间 (a, b) 内具有直到 $(n+1)$ 阶的导数, 则当 $x \in (a, b)$ 时,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

其中 $R(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, ξ 在 x_0 与 x 之间。

上述公式称为 n 阶的泰勒公式, $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ 称为拉格朗日型余项, 而

$R_n(x) = o[(x - x_0)^n]$ 称为皮亚诺余项。当 $x_0 = 0$ 的泰勒公式称为麦克劳林公式。

下列是五个常用的麦克劳林公式:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1}) \quad (-1 < x \leq 1)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

$$(\alpha \in \mathbb{R}, x \in (-1, 1))$$

8、导数的应用

1) 判单调

设 $y = f(x)$ 称在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 如果在 (a, b) 内 $f'(x) > 0$, 则 $y = f(x)$ 称在 $[a, b]$ 上单调增加; 在 (a, b) 内 $f'(x) < 0$, 则 $y = f(x)$ 称在 $[a, b]$ 上单调减少;

2) 判凹凸

设 $y = f(x)$ 称在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内具有一阶和二阶导数, 若在 (a, b) 内 $f''(x) > 0$, 则 $y = f(x)$ 称在 $[a, b]$ 上是凹的; 在 (a, b) 内 $f''(x) < 0$, 则 $y = f(x)$ 称在 $[a, b]$ 上是凸的;

3) 极值的判定

(1) 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续, 且在 x_0 的某去心邻域 $\overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$ 内可导。

(i) 若 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时, $f'(x_0) > 0$, 而 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时, $f'(x_0) < 0$, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值。

(ii) 若 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时, $f'(x_0) < 0$, 而 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时, $f'(x_0) > 0$, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极小值。

(iii) 若 $x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$ 时, $f'(x_0)$ 的符号保持不变, 则 $f(x)$ 点 x_0 处没有极值。

(2) 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处具有二阶导数且 $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$, 那么

(i) 当 $f''(x_0) < 0$ 时, 函数 $f(x)$ 点 x_0 处取得极大值。

(ii) 当 $f''(x_0) > 0$ 时, 函数 $f(x)$ 点 x_0 处取得极小值。

4) 求渐近

(1) 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$, 则有水平渐近线 $y = c$

(2) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, 则有垂直渐近线 $x = x_0$

(3) 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k \neq 0, \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = b$, 则有斜渐近线 $y = kx + b$

四、一元函数积分部分

1、不定积分基本积分表

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad (a \neq -1, \text{实常数})$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \sec^2 x dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$

$$\int \csc^2 x dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

$$\int \tan x \sec x dx = \sec x + C$$

$$\int \cot x \csc x dx = -\csc x + C$$

$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$$

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$$

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C \quad (a > 0)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C \quad (a > 0)$$

2、不定积分的性质

$$1) \quad (\int f(x) dx)' = f(x) \quad d(\int f(x) dx) = f(x) dx$$

$$\int F'(x) dx = F(x) + C \quad \int dF(x) = F(x) + C$$

$$2) \quad \int kf(x) dx = k \int f(x) dx$$

$$3) \quad \int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

3、不定积分的计算方法

$$1) \quad \text{换元积分法} \quad \int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx \xrightleftharpoons[\text{第二换元法}]{\text{第一换元法}} \int f(u) du$$

$$2) \quad \text{分部积分法} \quad \int u(x) dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x) du(x)$$

4、定积分基本性质

- 1) $\int_a^a f(x)dx = 0, \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
- 2) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$ (定积分与积分变量无关)
- 3) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$
- 4) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
- 5) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- 6) $\int_a^b kdx = k(b-a)$
- 7) 如果在区间 $[a, b]$ 上, $f(x) \geq 0$, 则 $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ ($a < b$)
- 8) 在区间 $[a, b]$ 上, $f(x) \geq g(x)$, 则 $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$
- 9) $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$
- 10) $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$ ($a < b$) 其中 m 是 $f(x)$ 的最小值, M 是最大值
- 11) **定积分中值定理**

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则存在 $\xi \in [a, b]$ 或 $\xi \in (a, b)$, 使 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$

5、牛顿-莱布尼茨公式 (牛-莱公式)

如果 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在上的一个原函数, 则

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)。$$

6、微积分基本定理

设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 则 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且

$$\Phi'(x) = f(x) (a \leq x \leq b)$$

7、常见的定积分公式

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

8、定积分的几何应用

1) 平面图形的面积

(1) 直角坐标情形 $A = \int_a^b f(x)dx$

(2) 参数方程情形 $A = \int_a^b \psi(t)\phi'(t)dt$. 其中 $\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} (t \in [\alpha, \beta])$

2、旋转体体积

1) $V_x = \int_a^b \pi f^2(x)dx$ 2) $V_y = 2\pi \int_a^b xf(x)dx$

五、微分方程部分

1、可分离变量的微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \Rightarrow g(y)dy = f(x)dx \Rightarrow \int g(y)dy = \int f(x)dx$$

2、齐次方程

对齐次方程 $\frac{dy}{dx} = \phi(\frac{y}{x})$, 令 $\frac{y}{x} = u$, y 是 x 的函数, u 是 x 的函数, $y = xu, y'_x = (xu)'_x$,

$\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$, 于是 $\frac{dy}{dx} = \phi(\frac{y}{x})$ 变为 $\frac{du}{\phi(u)-u} = \frac{dx}{x}$, 已是可分离变量的微分方程了。

3、一阶线性, 三大定势

有微分方程 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ 的通解公式: $y = e^{-\int P(x)dx} (\int Q(x)e^{\int P(x)dx} + C)$

4、二阶线性, 三大定势

1) 二阶非齐次线性微分方程的通解的结构: 非齐通=齐通+非齐特

(1) $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ 的通解: $y = Y(x) + y^*(x)$ (非齐通=齐通+非齐特)

(2) 如果 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ 的两个线性无关的特解,

那么 $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ (C_1, C_2 是任意常数) 就是方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ 的通解。

(3) $y_1^*(x)$ 与 $y_2^*(x)$ 分别是方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x)$ 和方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_2(x)$ 的特解, 那么 $y^*(x) = y_1^*(x) + y_2^*(x)$ 就是 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$ 的特解。

2) 二阶线齐次的通解

二阶齐次线性微分方程 $y'' + py' + qy = 0$, 特征方程为 $r^2 + pr + q = 0$ (一元二次方程)

(1) $\Delta = p^2 - 4q > 0$, $r^2 + pr + q = 0$ 有两个实根 r_1, r_2 ,

所以 $y'' + py' + qy = 0$ 的通解为: $y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$

(2) $\Delta = p^2 - 4q = 0$, $r^2 + pr + q = 0$ 有重根 $r_1 = r_2$,

所以 $y + py + qy = 0$ 的通解为: $y = (C_1 + C_2 x)e^{rx}$

(3) $\Delta = p^2 - 4q < 0$, $r^2 + pr + q = 0$ 有两个实虚根 r_1, r_2 ,

所以 $y + py + qy = 0$ 的通解为: $y = (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)e^{\alpha x}$

3) 二阶常系数非齐次线性微分方程的特解

(1) $y + py + qy = P_m(x)e^{kx}$, 其特解应与 $P_m(x)e^{kx}$ 为同名函数, $y^* = x^s Q_m(x)e^{kx}$ (其中 k 是特征方程的 s 重根: $s = 0$ 或 1 , 或 2 , x^s 为修正项)

(2) $y + py + qy = e^{kx}[P_l(x)\cos \omega x + P_n(x)\sin \omega x]$, 其特解应与 $e^{kx}[P_l(x)\cos \omega x + P_n(x)\sin \omega x]$ 为同名函数, $y^* = x^s e^{kx}[R_m^{(1)}(x)\cos \omega x + R_m^{(2)}(x)\sin \omega x]$

(其中 $m = \max\{l, n\}$, $k + i\omega$ 是特征方程的 s 重根: $s = 0$ 或 1 , x^s 为修正项)

六、无穷级数部分

1、正项级数敛散性判定

1) 比较判别法

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{v_n} = l, (0 < l < +\infty)$; $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同时收敛或同时发散

2) 比值审敛法

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$, $\rho < 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛; $\rho > 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散; $\rho = 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 比值

审敛法失效;

3) 根值审敛法

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$, $\rho < 1$ 时, 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛; $\rho > 1$ 时, 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散;

2、交错级数的莱布尼茨判别法

如果交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 满足条件: (1) $u_n \geq u_{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

则级数收敛, 且其和 $s \leq u_1$, 其余项 r_n 的绝对值 $|r_n| \leq u_{n+1}$ 。

3、求幂级数的收敛半径及收敛区间

对于 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0$, 收敛半径 R 为 $+\infty$

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho \neq 0$, 这时 $|x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |x| \rho < 1$, 幂级数收敛, 且为绝对收敛, $|x| < \frac{1}{\rho}$,

所以收敛半径 $R = \frac{1}{\rho}$

4、幂级数逐项求导求积分

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R , 则在 $(-R, R)$ 内有三条性质:

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $f(x)$ 是连续的

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 可逐项微分, 且

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}; x \in (-R, R)$$

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 可逐项积分, 且

$$\int_0^x f(x) dx = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}; x \in (-R, R)$$

七、向量部分

1、向量的基本概念

1) 向量的坐标 $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$

在相应坐标轴上的投影

2) 模长: $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

3) 方向余弦: $\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$

$$\cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

4) 单位向量 $\vec{a} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$

2、向量的运算

1) 向量的数量积 $\vec{a} \cdot \vec{b}$: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

2) 性质: (1) $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

(2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$

3、空间解析几何

1) 空间两点距离公式 $|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

2) 空间平面、直线方程

空间平面方程:

点法式 $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

一般式 $Ax + By + Cz + D = 0$

截距式 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

点到平面的距离 $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

(2) 空间直线方程

一般式 $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

点向式 (对称式) $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ (分母为 0, 相应的分子也理解为 0)

参数式 $\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + kt \end{cases}$

(3) 空间线、面间的关系

两平面间的夹角: 两平面的法向量 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 的夹角 θ (通常取锐角)

两平面位置关系: $\pi_1 // \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 // \vec{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$

两直线间的夹角: 两直线的方向向量的夹角 θ (取锐角)

两直线位置关系: $L_1 // L_2 \Leftrightarrow \vec{a}_1 // \vec{a}_2 \Leftrightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \vec{a}_1 \perp \vec{a}_2 \Leftrightarrow l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$$

平面与直线间的夹角

线面夹角：当直线与平面不垂直时，直线与它在平面上的投影直线之间的夹角 φ （取锐角）称为直线与平面的夹角。当直线与平面垂直时， $\varphi = \frac{\pi}{2}$ （ $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$ ）

线面位置关系： $L // \pi \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{n} \Leftrightarrow lA + mB + nC = 0$

$$L \perp \pi \Leftrightarrow \vec{a} // \vec{n} \Leftrightarrow \frac{l}{A} = \frac{m}{B} = \frac{n}{C}$$